

赛区评阅编号（由赛区组委会填写）：

2015 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

承 诺 书

我们仔细阅读了《全国大学生数学建模竞赛章程》和《全国大学生数学建模竞赛参赛规则》（以下简称为“竞赛章程和参赛规则”，可从全国大学生数学建模竞赛网站下载）。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛章程和参赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛章程和参赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛章程和参赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们授权全国大学生数学建模竞赛组委会，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

我们参赛选择的题号（从 A/B/C/D 中选择一项填写）： A

我们的报名参赛队号（12 位数字全国统一编号）： 201511141003

参赛学校（完整的学校全称，不含院系名）： 浙江工业大学

参赛队员（打印并签名）： 1. 施皓天

2. 潘鑫

3. 黄可蒙

指导教师或指导教师组负责人（打印并签名）： 宋军全

日期： 2015 年 9 月 14 日

（此承诺书打印签名后作为纸质论文的封面，注意电子版论文中不得出现此页。以上内容请仔细核对，如填写错误，论文可能被取消评奖资格。）

赛区评阅编号（由赛区组委会填写）：

2015 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编号专用页

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评阅人						
备注						

送全国评阅统一编号（由赛区组委会填写）：

全国评阅随机编号（由全国组委会填写）：

（此编号专用页仅供赛区和全国评阅使用，参赛队打印后装订到纸质论文的第二页上。注意电子版论文中不得出现此页，即电子版论文的第一页为标题、摘要和关键词页。）

太阳影子定位

摘要

地球上不同地点的太阳直射情况不相同,形成影子的长度与方向也存在差异。根据某地多个时刻物体影子的位置,确定拍摄地点与日期,对定位、测量和图像识别等领域具有重要意义。本文主要采用球面天文学、最小二乘法和图像灰度处理的理论和方法对问题进行分析 and 求解。

问题一: 首先根据地球绕日公转运动,假设在日地二体系统中,太阳相对于地球做匀速圆周运动,利用球面天文学和立体几何的理论,建立以地球为参照物的太阳绕地运动模型,基于几何关系推导得到太阳赤纬角与时间的函数关系。进而计算各时刻太阳高度角,得到直杆阴影的变化曲线。最后对赤纬角、纬度和杆长等影响因素和进行 $\pm 5\%$ 和 $\pm 10\%$ 变动,分析影子长度的变化规律。

问题二: 从影子轨迹和影子长度两个方向入手,使其与真实影子数据接近。构建影子轨迹优化模型和影长优化模型:前者目的是使得经过旋转变换后的影子坐标的与真实坐标的差值的平方和最小;后者目的是使得预测影长与真实影长的差值的平方和最小。运用最小二乘法遍历求解,并作模型误差分析,得到影长优化模型更接近实际。两种优化模型得到结果为

模型	影子轨迹优化模型	影长优化模型
经度	102.61100°E	108.48040°E
纬度	24.67062°N	19.22691°N

问题三: 由于在地球绕日公转过程中,自转轴倾角恒定,经推导得到在间隔0.5个公转周期,地球运动至公转轨道角位移相差 π 的两点时,对应的太阳直射点相对于赤道面对称,分别位于南半球和北半球。因此本问中最优位置成对出现。利用影长优化模型,为使得结果更加精确与全面,通过LINGO,在南北半球内,分别进行求解,得到结果为

	附件 2		附件 3	
经度	79.2074°E	79.1388°E	109.4069°E	109.3881°E
纬度	38.3299°N	38.4026°S	40.4777°N	40.6761°N
日期	2015.5.15	2015.11.14	2015.3.23	2015.3.23

问题四: 考虑所读取的图像是在像素坐标系下的灰度数据,在水平和垂直方向都存在倾斜角。故基于最小二乘法进行边缘检验,应用Radon变换进而插值校正图像。基于投影思想,针对日期已知和未知两种情况,建立优化模型,利用LINGO求解得到结果为

经度	122.6044°E	121.4593°E	121.4192°E
纬度	41.5247°N	42.1986°S	42.3513°N
日期	2015.7.13	2015.12.15	2015.6.21

本文以球面天文学与几何关系为基础,对影子定位技术展开较深入的分析与研究。优化结果与真实数据相符,表明模型精确并且可信度高,并分析误差来源。改变赤纬角、杆长和纬度等参数进行灵敏度分析,结果表明本文的模型对影子定位技术具有一定价值。最后进行优缺点分析,提出改进方向,用以指导实际应用。

关键词: 球面天文学; 几何分析; 最小二乘法; 图像处理; 灵敏度分析

1 问题重述

考虑在对视频数据进行分析时,确定视频的拍摄地点和拍摄时间是两个至关重要的因素。其中,太阳影子定位技术便是通过分析视频中物体影子随时间的变化规律,进而确定拍摄地点和拍摄日期的一种前沿方法。

根据上述背景知识,建立数学模型并解决以下问题:

(1) 建立影子长度变化的数学模型,并分析影响其变化的各个参数的变化规律。考虑当拍摄地点为天安门广场(北纬 39 度 54 分 26 秒,东经 116 度 23 分 29 秒)时,且拍摄时间为 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00。应用所建立的模型画出 3 米高的杆子太阳影子的变化曲线。

(2) 根据水平地面上某固定的直杆的太阳影子顶点坐标的数据,建立相应的数学模型确定其所处的地点。并将模型应用到附加 1 所给影子的坐标顶点数据中,求解给出若干个可能的拍摄地点。

(3) 根据水平地面上某固定的直杆的太阳影子顶点坐标的数据,建立相应的数学模型确定其地点和日期。并将模型应用到附件 2 和附件 3 的坐标顶点数据中,求解给出若干个可能的拍摄地点和拍摄日期。

(4) 根据附件 4 所给某直杆在太阳下的影子变化视频,已知直杆的高度为 2 米。建立相应的数学模型以确定视频拍摄的地点,进行求解,给出若干个可能的拍摄地点。如果视频中的拍摄日期未知时,考虑能否确定拍摄地点和日期。

2 问题分析

问题一

本小题要求建立影子长度变化模型,分析长度对各参数的变化规律,并将模型应用与实际地理背景,进行太阳影子的仿真计算。

考虑引起影子长度变化的直接因素是太阳高度角和杆子测量高度,据此分析影响太阳高度角变化的因子,最终得到影响影长变化的因子有太阳高度角、太阳赤纬角、太阳方位角和时角等参数。由于各参数中赤纬角的精确计算对定位准确性有很大帮助,为提高模型可靠性,基于球面天文学,建立合理的假设对问题进行简化,运用解析几何的方法,从理论上推导出太阳赤纬角表达式,进而求得各参数的表达式。将模型应用到题目所给时间和位置上求解,绘制不同时刻下直杆太阳影子长度的变化曲线。最后对影响影长变化的各个参数进行灵敏度分析,并研究其变化规律。

问题二

本小题要求根据已知某日期和时刻所对应的位置坐标,建立模型并应用到实际数据,找出满足要求的地理位置。

考虑所给数据中坐标系朝向未知,分析造成坐标变化的因素,故考虑从影子长度和方位角变化量两条思路进行分析。先利用最小二乘法的思想,使得真实影长和计算得到的影长偏差最小,对各参数关系用 lingo 在全球范围内进行遍历求解。考虑轨迹随时间的变化,基于坐标变化思想,对任意时刻的方位角求解。用最小二乘法使真实轨迹和计算轨迹偏差最小。对两种优化模型下求得的结果进行比较,并对模型进行误差分析。

问题三

本小题要求根据已知时刻所对应的位置坐标，建立模型并应用于实际数据，找出满足要求的地理位置。

考虑题目仅给出若干个相应北京时间杆子顶点的坐标，且未告知时间日期。根据地球绕太阳公转规律，得到对于地球上任意一个满足要求的地理位置，经过半个公转周期，在另一个半球必会有一个相应的位置坐标，即满足要求的数据是对称成对出现。在问题二模型基础上，增加了积日这一参数。用最小二乘法对数据在南北半球遍历求解地理位置，并进行误差分析。

问题四

本小题要求根据影子变化的视频，建立模型求解满足条件的若干个可能的拍摄地点，并考虑日期未知时的地理位置。

考虑读取出的图片为像素坐标系下的数据，且未知视角方向。故考虑先用最小二乘法进行边缘检测，再根据 Radon 变换检验倾斜度，从水平和垂直两个角度进行插值校正。将影子顶点投影到与相机拍摄镜面平行处，以一单位格像素的距离推算投影实际长度，进而确定图片该时刻的太阳高度角。基于最小二乘法对太阳高度角变化建模，分析已知日期和位置未知两种情况下，进行遍历求解并进行误差分析。

3 模型假设

- (1) 假设所有数据真实可靠。
- (2) 假设地球是正球体，半径处处相等。
- (3) 假设不考虑大气的折射。
- (4) 假设视频中的直杆与地面垂直。
- (5) 假设在以地球为参照物的日地系中，太阳绕地球做匀速圆周运动，单位时间内的角位移相等。

4 符号说明

符号	含义
R	日地系中，以地球为参照物，太阳绕地轨道半径
θ_{tr}	黄赤交角
δ	赤纬角
θ	单位时间内太阳相对于地球的角位移
$\Delta\theta$	太阳相对于地球运动的角位移
φ	地理纬度
α	地理经度
d	积日
H	杆长
l	影长
β	坐标系旋转角度

5 模型的建立与求解

5.1 问题一

5.1.1 影子长度几何参数的确定

考虑任意物体影子长度的都是由太阳光照射引起的，且物体高度和太阳高度角是影响影长的两个直接因素。某一地点太阳高度角在不同时刻是变化的，由于地球自身存在公转，且地球地心一直在赤道平面上，故太阳直射点在南北回归线之间移动，进而要考虑物体所在地理纬度。

考虑地球绕太阳公转时，地轴指向不变，导致太阳和地心连线与赤道平面夹角发生变化，故需考虑太阳赤纬角和太阳方位角。考虑地球自身在自转，故在探讨影子长度几何关系时还需要考虑时角等因素。

综上分析，在研究影子长度相关的几何参数时，考虑对太阳方位角、太阳赤纬角、太阳高度角和时角等参数进行分析定位，各参数的几何意义分别为：

- (1) 太阳赤纬角 δ ：太阳中心和地球中心的连线与地球赤道平面的夹角。其中，在春秋分时刻夹角最小为 0° ，在夏至和冬至时角度达到最大为 $\pm 23^\circ 26.36''$ ；
- (2) 太阳高度角 h ：地球表面上任意一点和太阳的连线与地平线的夹角；
- (3) 时角 t ：单位时间内地球自转的角度，定义正午时角为 0° ，记上午时角为负值，下午时角为正值。

5.1.2 太阳赤纬角的理论计算

(1) 赤纬角的理论推导

太阳赤纬角是地球赤道面与日地中心连线的夹角，黄赤交角为黄道面与赤道面的交角，是赤纬角的最大值，查阅相关文献^[1]，目前地球的黄赤交角约为 $23^\circ 26'$ ，在日地二体系统中，选定地球为参照物，假设太阳沿赤道面绕地球做匀速圆周运动。在以地心为原点的球坐标系上，以春分点为计时零点，绘制太阳运动轨迹，圆弧 AS 所在圆面即太阳绕地公转轨道面，公转周期为 365.2422 天，则太阳单位时间内走过的角度相同，记为 θ ，经过单位时间，太阳运动至点 S，如图 1 所示。

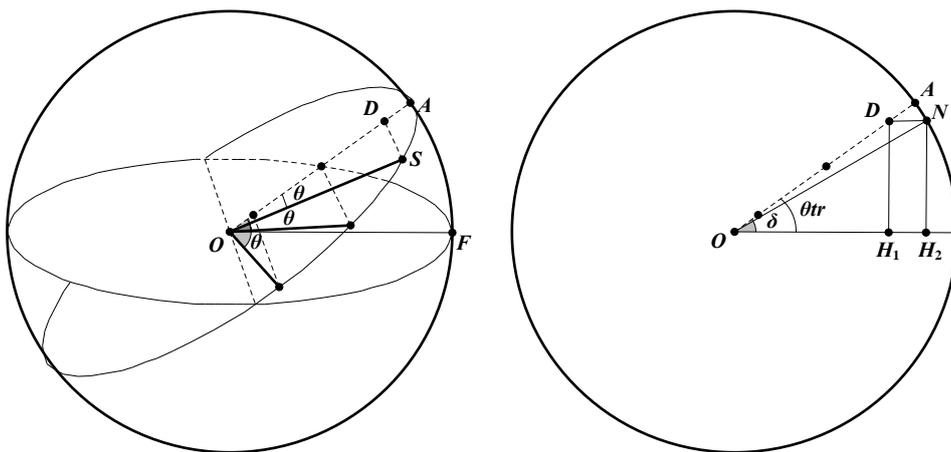


图 1 太阳运动轨迹示意图

图 1 中，左图为日地系中太阳相对地球运动轨道的三维模型；右图为太阳绕地运动轨道在平面 DOF 的投影；R 为绕地轨道半径； θ_{tr} 为黄赤交角， $\theta_{tr} = 23^\circ 26'$ 。

在日地系中，相对于地球移动的角度为

$$\theta = \angle SOA \quad (1)$$

过点 S 作垂线 SD 交直线 AO 于点 D ， OD 的长度为

$$OD = R \cos \theta \quad (2)$$

过点 D 作垂线 DH_1 交赤道面于点 H_1 ，作 OH_1 平行线 DN 交圆于 N ，则 N 为太阳直射点， δ 即为赤纬角，同理作垂线 NH_2 ，假设太阳相对地球做匀速圆周运动，则

$$OD = \frac{DH_1}{\sin \theta_{tr}} = \frac{R \sin \delta}{\sin \theta_{tr}} = R \cos \theta \quad (3)$$

假设轨道半径处处相等，得

$$\sin \delta = \cos \theta \cdot \sin \theta_{tr} \quad (4)$$

定义积日零点为 2015 年 1 月 1 日，以 2015 年春分日为 3 月 21 日，与 2015 年 1 月 1 日相差 79 天。由于春分时 $\delta = 0^\circ$ ，因此以春分日为基准，则得到赤纬角的计算式为

$$\sin \delta = \sin \theta_{tr} \sin \left[\frac{360}{365} (N - 79) \right] \quad (5)$$

(2) 赤纬角修正

上述推导过程中，地球绕日公转周期取 365 天，比回归年短约 0.2422 天，因此地球公转的实际运转周期约为 365.2422 天。通过更精确的地球实际公转周期数据将式(5)赤纬角修正为

$$\sin \delta = \sin \theta_{tr} \sin \left[\frac{360}{365.2422} (N - 79) \right] \quad (6)$$

5.1.3 影长模型建立

考虑太阳的周日视运行轨迹，计算太阳对地球上某一物体的影子长度变化轨迹，查阅文献^[2-4]得到主要由当地的地理纬度和时间这两个因素决定，并可根据 5.1.1 所确定的参数对影子定位。

假设物体所在地理纬度记为 φ ，地理经度记为 α ，北京时间记为 t_0 ，北京时间所在经度记为 α_0 ，各参数^[5,6]的意义如下：

(1) 时角 t ：考虑任一经度位置的物体在计算时角时都是以北京时间被基准，且规定正午时角为 0° 。故得到时角计算式为

$$t = 15 \times \left(t_0 + \frac{\alpha - \alpha_0}{15} - 12 \right) \quad (7)$$

(2) 太阳高度角 h ：入射至地表某点的太阳光线与该点切平面的夹角，计算公式为

$$h = \sin^{-1}(\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t) \quad (8)$$

取值范围为 $h \in [-90^\circ, 90^\circ]$ 。

(3) 太阳赤纬角 δ ：太阳中心和地球中心的连线与地球赤道平面的夹角，由赤纬角的理论推导得到公式为

$$\sin \delta = \sin \theta_{tr} \sin \left[\frac{360}{365.2422} (N - 79) \right]$$

综上分析得到，影子长度函数式为

$$l = H \times \cot h = l \times \cot(\sin^{-1}(\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t)) \quad (9)$$

5.1.4 影长关于参数变化规律分析

影子长度变化曲线分析

考虑在影长模型中根据经纬度和时间对各个时刻的太阳高度角求解进而求得影子长度。现将该模型应用到实际地理背景中，已知拍摄地点为天安门广场（北纬 39 度 54 分 26 秒，东经 116 度 23 分 29 秒）时，且拍摄时间为 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00。此时得到杆长为 3 米的物体在各整点处的影子长度如表 1 所示。

表 1 整点影长汇总表

时刻	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00
影长(m)	7.64432	5.27726	4.20843	3.81407	3.94894	4.65806	6.26017

分析表 1 中数据可得在该时段内呈现的影子长度先减小后增大，且总大于杆子实际长度。绘制影子长度连续变化曲线如图 2 所示。

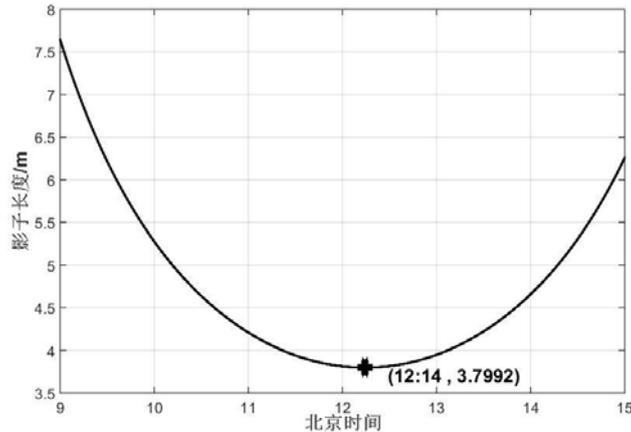


图 2 影长随时间变化曲线

分析图 2 中影子长度变化轨迹得到，影子长度在北京时间 12:14 时刻影子长度最短为 3.7992 米，即此时刻太阳高度角最大为 38.296° 。影子长度变化率先减小后增大，即越靠近北京时间 12:14 时刻，太阳高度角和影子长度单位时间的变化率越小，且曲线是连续变化的。联系实际背景可得，在北京时间 10 月 22 日，太阳直射点在南半球，且往南回归线方向移动，故相对应天安门这一地点的影子长度均大于实际长度是合理的，一定程度上也说明了模型的可靠性。

参数变化分析

考虑在建立影子长度变化模型时，涉及到各参数间的几何计算，故对影响影长的太阳高度角、赤纬角和太阳方位角这三个参数分析，绘制所求时段内的变化如图 3 所示。

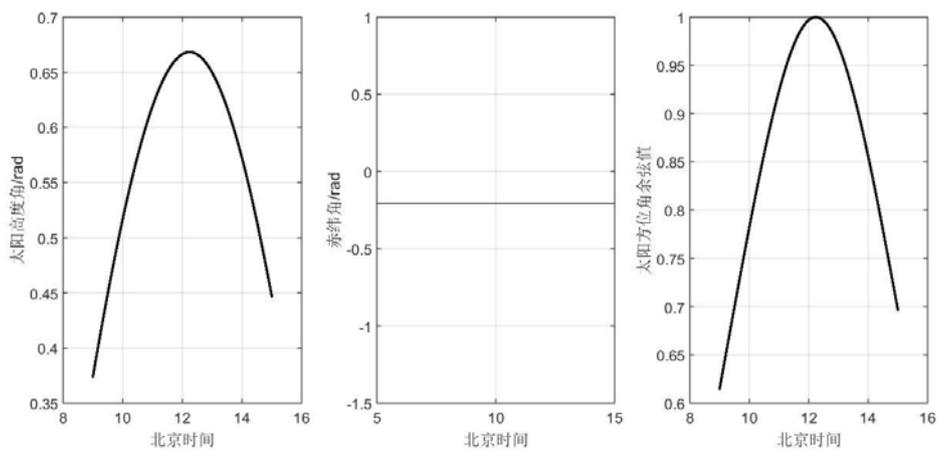


图 3 参数分析示意图

分析图 3 可得，在一天中太阳赤纬角是恒定不变的，太阳高度角和太阳方位角是变化的。在 12:14 时刻太阳高度角最大，且太阳方位角的余弦值达到最大，考虑方位角的余弦绘制变化曲线时，二者的趋势一致。

影长关于各参数变化趋势

对本文的推导与运算过程进行总结和归纳，总结出影响影长数值的各参数为太阳赤纬角、杆长、地理纬度和春分日，具体变化趋势分析如下：

(1) 太阳赤纬角

赤纬角是影子长度变化最关键的参数。故首先分析影子长度对太阳赤纬角变化的敏感程度，对赤纬进行 $\pm 5\%$ 和 $\pm 10\%$ 变化，得到结果如图 4 所示。

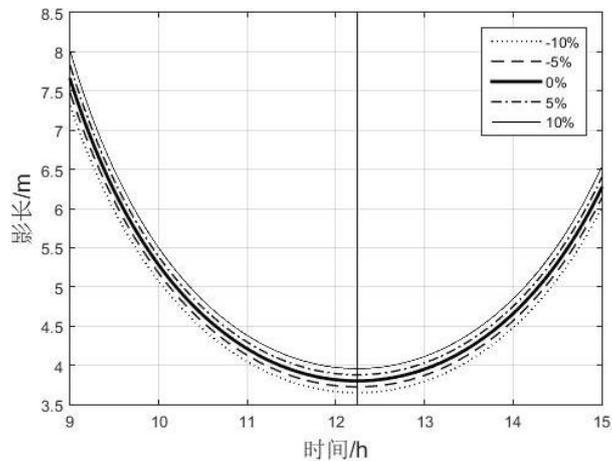


图 4 太阳赤纬角对影长灵敏度分析图

由结果分析可知，影子长度 l 对太阳赤纬角 δ 稍敏感。随着赤纬角 δ 的增大，每一时刻的影子长度都呈现增长趋势，但并不改变影子长度最短时所对应的时刻且整体趋势不变，太阳高度角最大时刻影子长度从 3.6481m 增加到 3.9560m，变化量达到 8.4428%。联系实际，若太阳赤纬角 δ 改变，相应的，太阳方位角和太阳高度角都会改变，而太阳高度角又直接决定了影子长度的变化。故太阳赤纬角是影响影长变化最关键的参数。

(2) 杆长

考虑影子长度由太阳高度角和杆子长度两个因素直接决定。故这里分析影子长度对杆长的敏感程度。对高度角进行 $\pm 5\%$ 和 $\pm 10\%$ 变化，得到结果如图 5 所示。

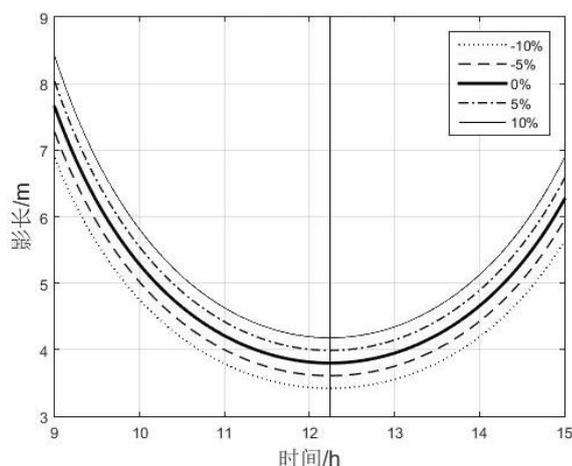


图 5 杆长对影长灵敏度分析图

由结果分析可知，影子长度 l 对杆长 H 较为敏感。对于天安门该给定地理位置，任意时刻的太阳高度角是定值。随着杆子长度的增加，每一时刻的影子长度是线性增加的，整体趋势不变，太阳高度角最大时刻影子长度从 3.4193 变化到 4.1792，

变化量达到 22.2238%。联系实际，当杆子长度增加时，影子长度自然增加，但敏感度稍小于纬度变化带来的影响。

(3) 地理纬度

考虑不同的地理纬度处高度角和赤纬角等参数不同，故分析影长对地理纬度的敏感程度。对地理纬度进行 $\pm 5\%$ 和 $\pm 10\%$ 变化，得到结果如图 6 所示。

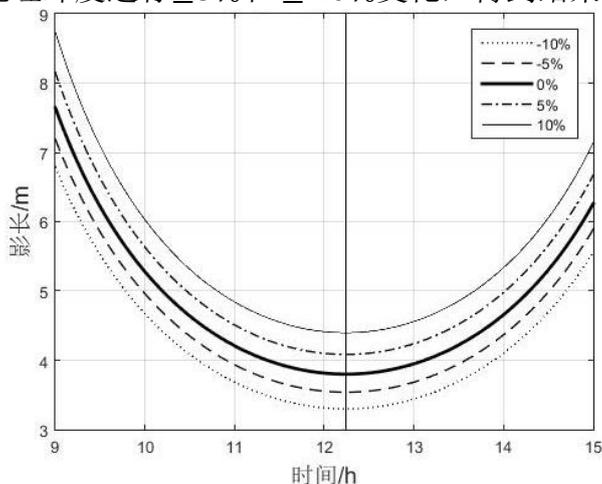


图 6 地理纬度对影长灵敏度分析图

由结果分析可知，影子长度 l 对地理纬度 φ 极为敏感。对于天安门该给定地理位置，随着地理纬度的增加，每一时刻的影子长度都呈现减小趋势，但并不改变影子长度最短时所对应的时刻且整体趋势不变，太阳高度角最大时刻影子长度从 4.3970 米减小到 3.2985 米，变化量达到 24.9830%，故地理纬度 φ 对影子长度 l 的敏感程度极高。联系实际，若地理纬度 φ 改变，相应的，太阳直射点位置会发生变化，且纬度变化引起实际位置太阳高度角更加剧烈，从而引起影子长度变化。故地理纬度 φ 比太阳赤纬角 δ 更加敏感。

(4) 春分日

春分日的变化会引起时角的变化，从而间接影长，对春分日 ± 1 和 ± 2 日进行变化，得到结果如图 7 所示

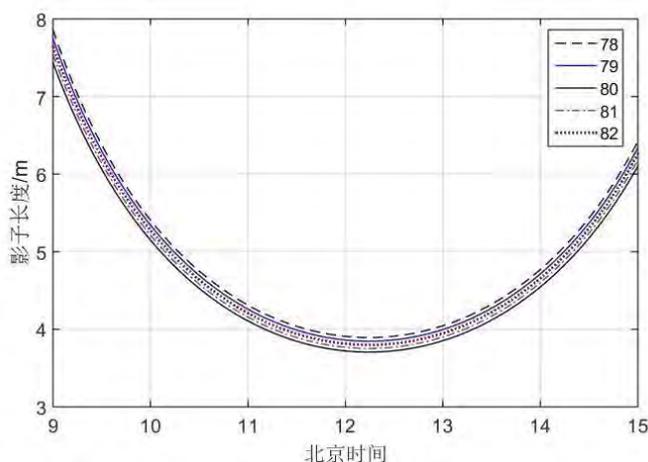


图 7 春分日对影长灵敏度分析图

式(6)为推导得到的赤纬角计算式，取每年的 1 月 1 日为积日零点，79 表示春分日的积日为第 79 天，节气在公历日期中并不是固定的，对于不同的年份，春分的积日会有小幅度的波动，积日的数值直接影响时角，时角影响影长的计算

结果。本文设定春分日的积日在 ± 2 天内变化，影子长度如图 7 所示。对于 2015 年，春分日为 79，得到的影子长度最短，为当时时间为 12 点 14 分 29 秒时，影子长度最短，为 3.7992 米。

综上所述可得：考虑影子长度由直杆高度和太阳高度角直接决定，故影子长度和太阳高度角的正切值成反比，且随着太阳赤纬角获得增大影子长度也会增大，但对此本问地理位置，随着地理纬度的增加，影子长度却呈减小趋势。

5.2 问题二

考虑对给定太阳顶点影子坐标数据，建立模型确定所观测点的地理位置。首先考虑每个时间点的影子长度是已知的，而其直接的影响因子为太阳高度角，故利用最小二乘法进行求解，使得模型结果各时刻的影子长度和真实数据最相近。再考虑由于方位角的变化进行坐标变化，采用最小二乘法建立模型求解。

5.2.1 影子轨迹优化模型

建立确定直杆所处位置与时间的数学模型，由于描述太阳状态的角度对时间十分敏感，无法直接使用北京时间，为了计算直杆所处地点，需要转换为真太阳时^[7]，即当地的地方时间，建立优化模型，运用最小二乘法使得预测影长轨迹与实际影长轨迹之间误差最小，进而得到可能的观测位置。

直杆影长的确定

由问题一模型几何求解得到影长与太阳高度角之间函数关系为

$$l = H \times \cot h \quad (10)$$

其中， h 为太阳高度角， $h = \arcsin(\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t)$ 。

考虑建立平面直角坐标系 xoy ， x 轴正方向为正东， y 轴正方向为正北，则影长在 x 轴和 y 轴的分量分别为

$$\begin{cases} x = \frac{l \sin A}{\tan h} \\ y = \frac{l \cos A}{\tan h} \end{cases} \quad (11)$$

其中， A 为太阳方位角。

坐标系旋转变换

考虑附件 1 中所给出的 x 和 y 坐标数据并没有规定坐标轴方向，由于任意两个时刻的坐标系角度是变化的，故需要统一坐标系。再用将最小二乘法计算求解，将得到的影长坐标数据与真实坐标数据进行比较。坐标变换示意图如图 8 所示。

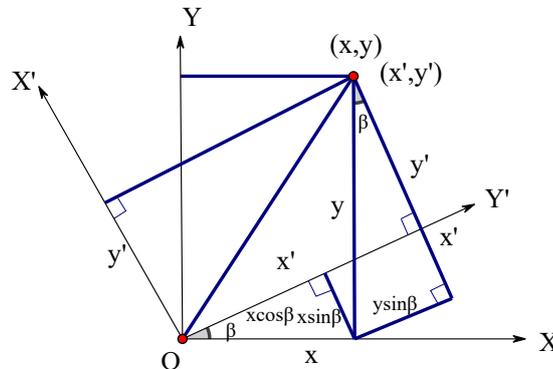


图 8 坐标转换示意图

将各时刻坐标系旋转 β 角后，由图 8 转换示意图分析，得到新旧坐标变换公式为

$$\begin{cases} x' = x \cos \beta + y \sin \beta \\ y' = -x \sin \beta + y \cos \beta \end{cases} \quad (12)$$

其中, β 为两平面直角坐标系变化前后旋转角度; x 和 y 为变化前坐标; x' 和 y' 为变化后坐标。

优化模型的建立

求解的目标是得到若干个可能的直杆所在地点, 为使得阴影的长度和位置即轨迹与附件所给尽可能相近, 利用最小二乘法, 建立如下优化模型:

(1) 目标函数为

$$\min f = \sum_{i=1}^n [(x'_i - x_i)^2 + (y'_i - y_i)^2] \quad (13)$$

其中, x_i 和 y_i 为真实的影子 x 坐标和 y 坐标; x'_i 和 y'_i 为预测得到的影子 x 坐标和 y 坐标。

(2) 约束条件为

$$\begin{cases} \varphi \in [-90^\circ, 90^\circ] \\ \alpha \in [-180^\circ, 180^\circ] \end{cases}$$

表明在全球范围内遍历计算最优解。

(3) 参数关系为

$$\begin{cases} \sin \delta = \sin \theta_{tr} \sin \left[\frac{360}{365.2422} (N - 79) \right] \\ t = 15 \times \left(t_0 + \frac{\alpha - \alpha_0}{15} - 12 \right) \\ h = \sin^{-1}(\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t) \end{cases} \quad (14)$$

对上述几何关系式中未知参数在全范围遍历使得计算得到轨迹与真实轨迹之间相对误差尽可能低, 并运用最小二乘法, 通过 MATLAB 对优化模型进行计算求解。

5.2.2 影子长度优化模型

考虑在问题一的分析过程中, 建立了一种已知任意观测点的地理位置和时间, 描述影子长度变化的模型。现已知指定北京时间与相对应的影长在某直角坐标系内的 x 坐标和 y 坐标数据, 即每个时间点对应的影长, 要求得到各观测点的位置。

根据问题一模型得到影长和杆长数学表达式为

$$l = \sqrt{x^2 + y^2} = H \times \cot h \quad (15)$$

其中, h 为太阳高度角, $h = \sin^{-1}(\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t)$ 。

测量地点经纬度和时间的数值体现在太阳高度角 h 内, 求解的目的是使得预测出的所在位置的影长与真实影长的数值尽可能接近, 利用最小二乘法建立的优化模型为

(1) 目标函数为

$$\min f = \sum_{i=1}^n (l'_i - l_i)^2 \quad (16)$$

其中, l_i 为影长真实数据, l'_i 为影长的预测数据。

(2) 约束条件为

$$\begin{cases} \varphi \in [-90^\circ, 90^\circ] \\ \alpha \in [-180^\circ, 180^\circ] \end{cases}$$

表明在全球范围内遍历计算最优解。

(3) 参数关系为

$$\begin{cases} \sin \delta = \sin \theta_{tr} \sin \left[\frac{360}{365.2422} (N - 79) \right] \\ t = 15 \times \left(t_0 + \frac{\alpha - \alpha_0}{15} - 12 \right) \\ h = \sin^{-1}(\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t) \end{cases}$$

对上述几何关系式中未知参数在全范围遍历使得计算得到影长与附件所给数据影长之间差值平方和尽可能低,运用最小二乘法通过 Lingo 对优化模型进行计算求解。

5.2.2 模型对比与误差分析

通过对 5.2.1 和 5.2.2 两种优化模型求解,得到满足影子轨迹最优和影子长度最优目标下的位置信息如表 2 所示。

表 2 两种优化模型求解结果

参数	经度	纬度	杆长	目标函数值
轨迹优化模型	102.61100°E	24.67062°N	1.964525m	6.62768×10^{-4}
影长优化模型	108.48040°E	19.22691°N	2.042636m	3.99040×10^{-8}

考虑两种优化模型求解后,得到通过影长优化地理位置位于海南省,而通过轨迹优化地理位置位于云南省。现考虑绘制对影长模型下真实影子长度数据和测算数据图像以及轨迹优化模型下测算轨迹与真实影子轨迹的趋势图,得到两种模型下的图像如图 9 所示。

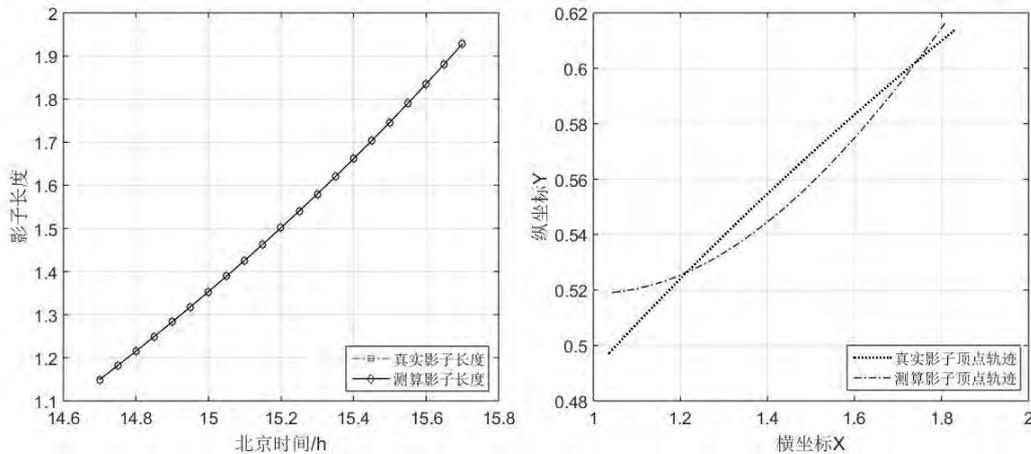


图 9 影子结果比较图

通过对图 9 分析可得,影子长度优化模型误差明显远小于轨迹优化模型。用最小二乘法得到的影子长度与真实测量长度几乎一致,其最大相对误差的位置也小于 $1 \times 10^{-5}\%$ 。对模型比较可得,采用影子长度优化模型运用最小二乘方法得到的结果更精确,可靠性更高。

5.3 问题三

5.3.1 模型特点分析

考虑题目要求根据附件所给若干个相应北京时间杆子顶点的坐标,建立模型确定直杆所处的地点和日期。选择问题二模型中坐标变换方位角优化模型和影子长度优化模型中效果较好的影子长度优化模型对本小问求解。由于日期未知,考虑地球在公转过程中太阳直射点在南北回归线之间移动,故在南北半球必存在相对应的一组地理位置,满足题目所给条件。

故本问从南北半球两个角度考虑对某时刻的影子长度。当秋分日或春分日时，太阳直射点在赤道上，对于地球上相对于赤道面对称的两点，即纬度大小相同，各自分立于南北半球的两点，太阳光线对该两点的照射角度相等，在地面上留下的影子长度相等；当非春分日或秋分日时，在地球绕日公转轨道上任两个角位移为 π 的点，时间相差半个公转周期的，由于地轴倾角恒定，两点的太阳直射角纬度大小相等，从大地坐标系观察，两点的纬度相等，对称分立于赤道面两侧，几何示意图如图 10 所示。

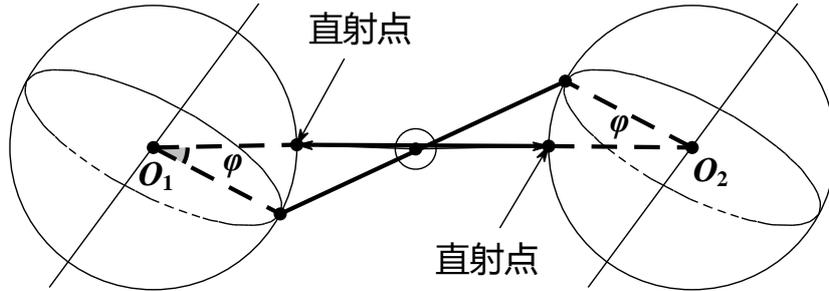


图 10 太阳直射点示意图

5.3.2 模型的建立

根据问题二模型的求解结果分析，得到从不同角度对模型求解时，考虑影子长度为目标求解时效果最好。根据附件所给各时刻所对应的坐标，求解南北半球满足条件的地理位置。

根据问题一二模型得到影长和杆长数学表达式为

$$\begin{cases} l = \sqrt{x^2 + y^2} \\ l = H \times ctgh \end{cases}$$

其中， h 为太阳高度角， $h = \sin^{-1}(\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t)$ 。

太阳高度角 h 由地理位置和时间直接决定，现利用最小二乘法的思想对参数间的几何关系建立模型，使得预测得到的某地理位置各时刻所对应的影子长度与真实数据之间的误差尽可能小，其数学模型为

(1) 目标函数为

$$\min f = \sum_{i=1}^n (l'_i - l_i)^2$$

其中， l_i 为影长真实数据， l'_i 为影长的预测数据。

(2) 约束条件

由于最优解成对出现，为获得所有的最优位置，在南北半球分别建立约束条件如下：

a.当限制位置信息在北半球时，其约束条件为

$$\begin{cases} \varphi \in [0^\circ, 90^\circ] \\ \alpha \in [-180^\circ, 180^\circ] \end{cases}$$

b.当限制位置信息在南半球时，其约束条件为

$$\begin{cases} \varphi \in [-90^\circ, 0^\circ] \\ \alpha \in [-180^\circ, 180^\circ] \end{cases}$$

其中， α 表示地理经度； φ 表示地理纬度

(3) 参数关系为

$$\begin{cases} \sin \delta = \sin \theta_{tr} \sin \left[\frac{360}{365.2422} (N - 79) \right] \\ t = 15 \times \left(t_0 + \frac{\alpha - \alpha_0}{15} - 12 \right) \\ h = \sin^{-1}(\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t) \end{cases}$$

考虑实际背景，当假设地球为正球体研究时，地理位置必是对称出现的。现根据上述模型对南北两个半球分别约束求解。并比较两个模型求解得到的地理位置以及积日等参数，分析模型可靠性。

5.3.3 模型的求解

考虑将附件 2 和附件 3 已知时刻的坐标数据应用到 5.3.2 的模型中求解，得到最优位置两组数据点如图 11 所示。



图 11 最优点位置示意图

相应地理经纬度、日期和杆子长度等参数值如表 3 所示。

表 3 问题三结果汇总表

	经度	纬度	杆长	日期
附件二	79.2074°E	38.3299°N	1.9156m	2015 年 5 月 15 日
	79.1388°E	38.4026°S	1.9144m	2015 年 11 月 14 日
附件三	109.4069°E	40.4777°N	4.0754m	2015 年 3 月 23 日
	109.3881°E	40.6761°S	4.1038m	2015 年 3 月 23 日

由表 3 中的结果可知，经过遍历运算，附件 2 的一对最优位置分别位于南北半球，经度和纬度数值相对误差分别为 0.09% 和 0.19%，杆长的相对误差为 0.06%，十分接近，两点几乎相对于赤道面对称，日期之差为 183 天，约为地球绕日的半周期，符合本模型。由附件 3 的求解结果可知，该对南北半球的最优位置的经度和纬度数值相对误差分别为 0.02% 和 0.49%，杆长的相对误差为 0.69%，相对于赤道面对称，但是日期却在同一天，为 3 月 23 日，经研究分析，2015 年春分日为 3 月 21 日，最优日期在春分日附近，此时的太阳直射点位于赤道上，太阳光照射至相对于赤道面对称的两点上，高度角相等，影长相等，因此求得的最优解与事实相符。

5.4 问题四

考虑视频数据中视角是单一的，而影子长度变化存在一定程度的旋转，故无法直观得读取有效数据。现从像素角度出发，对视频进行处理提取数据。由于视频数据量的巨大，总帧数为 61020 帧，由于视频时长不足 40 分钟，影子轨迹在世界坐标系中变化并不明显，故选取一定量的帧数数据分析。考虑每 100 秒选取一帧，通过 MATLAB 求解共得到 24 张示意图。

5.4.1 边缘检测以及图像校正

考虑相机拍摄视频时视角方向是未知的，需要通过相应的转换将数据转换到世界坐标系中。现考虑通过图像校正使得视角正对底座，即影子长度在相机平面方向上的值为真实值，以此确定太阳高度角简化模型。

(1) 基于最小二乘法的边缘检测

考虑在像素坐标系中，照片存在一定的倾斜角，故需建立模型对图像矫正。分析杆子、影子和底座发现底座像素值较明显且易识别。根据 5.4.2 分析中，以杆子底座中心为起始点，根据中心灰度值，在其范围内搜索出满足要求的像素点。现假设底座中心灰度值为 ψ ，像素坐标系中任一点灰度值为 Φ 为确定边缘建立如下数学模型：

a. 用最小二乘法使得灰度值之差平方和尽可能小，故目标函数为

$$\min f = \sum (\psi - \Phi)^2 \quad (17)$$

b. 从中心开始向外搜索任意满足约束条件的点，假设灰度值之差小于 30 时即停止该方向搜索，故约束条件为

$$|\psi - \Phi| \leq 30 \quad (18)$$

(2) Radon 变换检测混合倾斜度

根据已求得的底座边缘图像，底座倾斜模式为混合倾斜，示意图如图 12 所示。

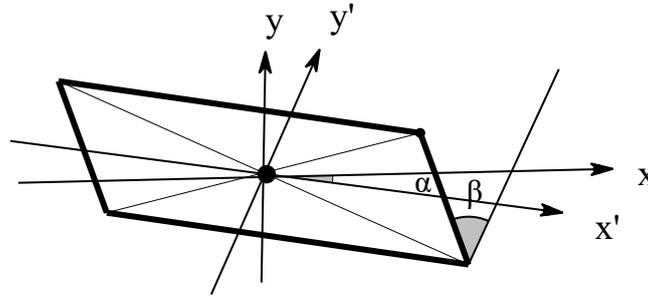


图 12 混合倾斜示意图

根据倾斜图像，利用 Radon 变换^[8]对图像进行倾斜校正。该变换可在任意维度的空间内进行倾斜校正，对任一图像，其二维欧式空间的变换形式为

$$R(\theta, \rho) = \iint f(x, y) \delta(\rho - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy \quad (19)$$

其中，积分平面为图像所在的平面； $f(x, y)$ 为像素点 (x, y) 的灰度值； δ 为狄拉克函数； ρ 为直线到原点的距离； θ 为直线与原点的垂线方向和坐标轴 x 轴的夹角。

(3) 倾斜校正

水平方向：考虑将最小二乘法得到的图像边缘转化为二值边缘图像，对图像进行 Radon 变换，对二值图像峰值点按序将维，将每列之和存放入矩阵进行线性插值求解最大值，进而对水平方向旋转无损校正。

垂直方向：沿 x 轴方向的逆错切变换，其坐标校正矩阵为

$$[X_2 \ Y_2 \ 1] = [X_1 \ Y_1 \ 1] \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tan \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

其中, X_1 和 Y_1 分别为水平倾斜校正后图像的 x 坐标和 y 坐标; X_2 和 Y_2 分别为最终倾斜校正后图像的 x 坐标和 y 坐标; β 为垂直倾斜角度。

综上所述,通过选取第一帧图片的数据进行处理,得到校正前后影子在世界坐标系中的示意图如图 13 所示。

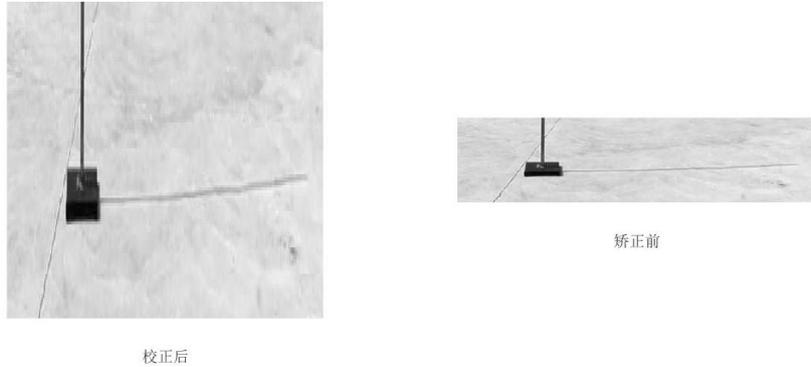


图 13 影子校正前后比较图

由图 13 可以看出,图像矫正前后影子阴影轨迹有了明显的变化,说明相机在拍摄视频时并不是垂直于杆子和影长所构成的平面,而是存在一定的倾斜角度弧形运动,校正目的就是使得我们视角就是正对底座。

5.4.2 实际影长提取

考虑对所选取 24 帧图片位置信息提取,通过对每一帧图片进行灰度处理,用 MATLAB 对图像建立像素坐标系。以底座中心为杆子起始点,其像素坐标为(434,592)。考虑图片是每间隔 100 秒取一帧,期间数据便不是完全投影在轴上,故需要根据像素坐标计算求解。根据灰度处理后影子的大致落点,选择一个包含落点的区域,对每一个存在的像素坐标进行计算,选取距离杆子起始点最远的点为杆子顶点在像素坐标系下的位置。通过计算绘制得到某时刻 24 个选取点的坐标位置信息如图 14 所示。

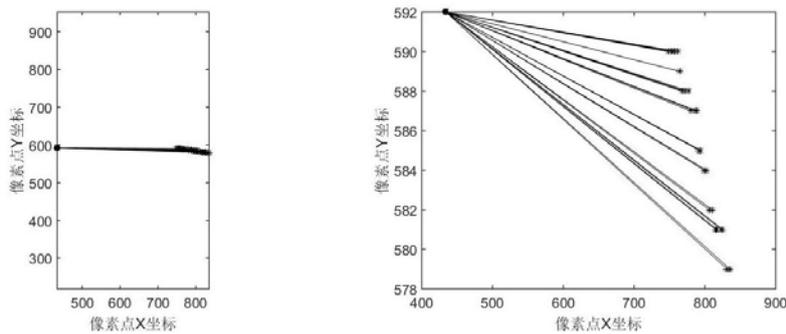


图 14 选取点的坐标位置信息示意图

分析图 14 可得,通过 5.4.2 模型图像校正后,视角正对底座,通过影子在像素坐标 x 方向上的数值的比例换算,可以得到世界坐标系中的实际长度。已知杆子长度为 2 米,考虑到杆子所在直线与拍摄镜面平行,故根据杆子长度所占像素单位格数,得到每单位格数在世界坐标系中的长度为 $4.39432 \times 10^{-3}m$ 。

对各帧数投影求解得到的像素值换算后与实际长度值进行比较,其长度变化量柱形图如图 15 所示。

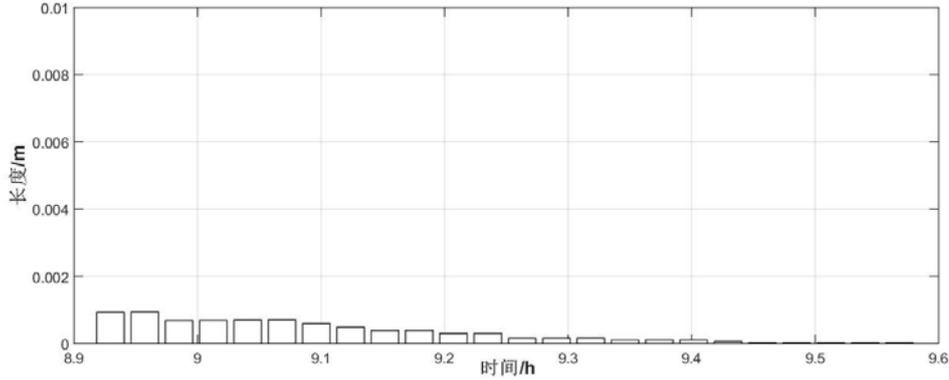


图 15 各组数据坐标投影前后影长变化量示意图

由图 15 可知，在用投影思想对任意时刻的影长均可以如此处理，且由于初始时刻太阳高度角最大，即此时时刻变化量最大，但仍小于 0.001m，故精度较高，能够通过误差检验，可用此方法进行分析处理。

5.4.3 拍摄位置模型建立与求解

通过 5.4.2 和 5.4.3 的图像分析处理，对视角校正，即得到了任意时刻的太阳高度角 h_0 。为求解视频所对应的地理位置，现利用最小二乘法建立优化模型，使得求解得到的太阳高度角与真实值之间的插值平方和最小，根据选取的 24 帧图像的像素坐标系为数据基础进行分析，数学模型如下：

(1) 目标函数为

$$\min f = \sum_{i=1}^n (h - h_0)^2 \quad (21)$$

其中， h_0 为太阳高度角真实数据， h 为太阳高度角的测量数据。

(2) 约束条件为

$$\begin{cases} \varphi \in [-90^\circ, 90^\circ] \\ \alpha \in [-180^\circ, 180^\circ] \end{cases}$$

其中， α 表示地理经度； φ 表示地理纬度。

(3) 参数关系为

$$\begin{cases} \sin \delta = \sin \theta_{tr} \sin \left[\frac{360}{365.2422} (N - 79) \right] \\ t = 15 \times \left(t_0 + \frac{\alpha - \alpha_0}{15} - 12 \right) \\ h = \sin^{-1}(\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t) \end{cases}$$

对上述几何关系式中未知参数，通过 MATLAB 对优化模型进行计算，得到位置参数如表 4 所示

表 4 运算结果

	经度	纬度	日期
参数值	122.6044°E	41.5247°N	2014.7.13

5.4.4 日期优化模型的建立与求解

日期优化模型建立

考虑当日期未知时，即模型转化为问题三模型进行求解。从南北半球两个角度考虑，利用最小二乘法建立优化模型，使得求解得到的太阳高度角与真实值之间的插值平方和最小，根据选取的 24 帧图像的像素坐标系为数据基础进行分析，数学模型如下：

(1) 目标函数为

$$\min f = \sum_{i=1}^n (h - h_0)^2$$

其中, h_0 为太阳高度角真实数据, h 为太阳高度角的测量数据。

(2) 约束条件

由于最优解成对出现, 为获得所有的最优位置, 在南北半球分别建立约束条件如下所示:

a. 当限制位置信息在北半球时, 其约束条件为

$$\begin{cases} \varphi \in [0^\circ, 90^\circ] \\ \alpha \in [-180^\circ, 180^\circ] \end{cases}$$

b. 当限制位置信息在南半球时, 其约束条件为

$$\begin{cases} \varphi \in [-90^\circ, 0^\circ] \\ \alpha \in [-180^\circ, 180^\circ] \end{cases}$$

其中, α 表示地理经度; φ 表示地理纬度

(3) 参数关系为

$$\begin{cases} \sin \delta = \sin \theta_{tr} \sin \left[\frac{360}{365.2422} (N - 79) \right] \\ t = 15 \times \left(t_0 + \frac{\alpha - \alpha_0}{15} - 12 \right) \\ h = \sin^{-1}(\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t) \end{cases}$$

对上述日期优化模型, 利用 lingo 遍历求解。

模型结果与分析

(1) 模型结果分析

对模型进行求解得到一组相对应的数据点, 其相应地理经纬度、日期等参数值如表 5 所示。

表 5 结果汇总表

	经度	纬度	日期
北半球位置点	121.4192°E	42.3513°N	2015.6.21
南半球位置点	121.4593°E	42.1986°S	2015.12.15

(2) 误差来源分析

a. 由于题目所给杆长数据为估计值, 故利用此杆长数据进行回推时, 在一定程度上会引起位置经纬度和日期的变化;

b. 在像素坐标系中, 采用以一个单位格距离来推算实际影子长度, 在单位格四周选择不同, 在回推日期时, 会引起位置经纬度和日期的变化;

c. 在用最小二乘法求解时, 由于赤纬角选取公式的不一致, 会引起各个变量的改变, 故在用模型回推时间时, 会引起位置经纬度和日期的变化。

综上所述, 对于求解得到北半球的日期为 6 月 21 日, 虽与 7 月 13 日存在一定的偏差, 但在误差允许范围之内。

6 灵敏度分析

问题四题目给出的直杆估计高度为 2 米, 并非精确高度, 因此有必要进行杆长对定位结果的灵敏度分析, 对杆长进行 $\pm 10\%$ 的变化, 分析对定位结果的影响

程度。经过仿真计算，在日期已知的前提下，结果如图 16 所示。

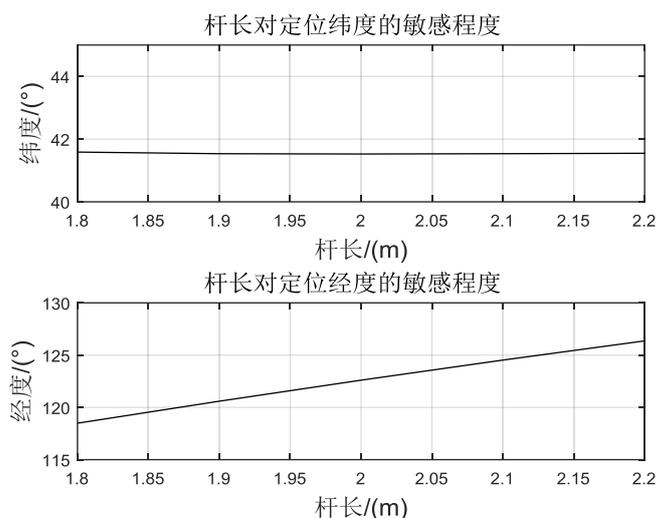


图 16 杆长对定位经纬度的敏感程度（问题四数据）

由图 16 可知，随着杆长的改变，纬度几乎没有变化，但是经度变化较为剧烈，原因在于该点位于北半球，且纬度不低，测量时间在上午，杆长的增加，表明若要使预测结果与视频中的状态尽可能相同，太阳高度角需要变大，从而使得自身产生的影长接近真实数据。由于改点在北回归线以北，增大太阳高度角的最有效途径是在地球表面寻找位置点，以靠近太阳与地心的连线。随着杆长的增加，纬度也会发生变化，但没有经度变化的剧烈，这是由于沿着经度方向移动，不仅自身的高度角变化，伴随地球自西向东自转，高度角的变化更加剧烈。

针对不同地点、不同时间的数据再次进行改变杆长的灵敏度分析，为选择具有代表性的位置，本文使用第二问的数据，定位地点位于北半球，北回归线以南，对杆长进行 $\pm 10\%$ 的变化，对定位结果的影响程度，如图 17 所示。

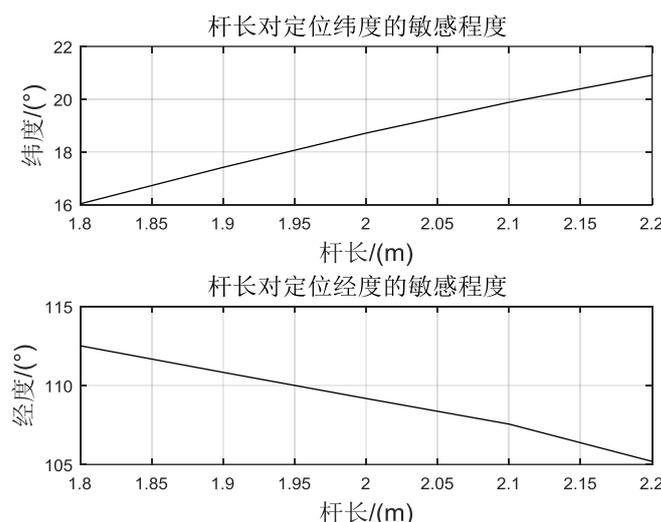


图 17 杆长对定位经纬度的敏感程度（问题二数据）

对图 17 展开分析，与问题四数据不同的是，随着杆长的增加，纬度也随之剧烈增加，这是由于该点位于北回归线以南，相对于回归线以外的地点，太阳高度角更加小，若需要使影长减小，沿纬度运动更加有效。与先前的灵敏度分析另一个差异在于，经度随着杆长增加而剧烈减少，这是由于测量时段为 14:42

至 15:42 之间, 已过当日的正午时间, 因此若要减小太阳高度角, 需要跟随太阳向西移动, 即经度减少。

7 模型的评价与改进

7.1 模型的优点

(1) 对问题背景进行研究, 赤纬角计算式的形式多种多样。在赤纬角不明确的情况下, 建立合理的假设, 将问题简化, 根据几何关系, 通过自行推导得到赤纬角与积日的关系, 物理意义更加清晰明确, 每个物理量都具备其特定的含义, 具有较强的科学性和合理性。

(2) 从高度角和直杆影长两个研究对象入手, 对问题二进行分析和求解, 比较两种方法的结果误差, 直杆影长优化模型的误差较小, 因此在第三问的分析与求解过程中, 采用直杆影长优化模型, 结果更加准确。

(3) 考虑到地球赤道面两侧的对称性, 在地球绕日公转的过程中, 地轴倾角不变, 因此在公转轨道角位移差值为 π 的两点, 太阳直射角大小相等, 直射光线关于赤道面对称。若时间未知, 只获得了直杆阴影在某坐标系中的数据, 在南半球和北半球必能寻找到两个关于赤道面对称的位置与相应的时间, 使得优化模型中的目标函数取得最小值。在程序实现过程中, 通过 MATLAB 软件, 利用最小二乘法遍历搜索最优解。通过该方法, 理论上在全球范围内得到所有的最优解, 提高计算结果的精确程度。

(4) 根据水平和插值方向倾斜情况, 用最小二乘法和 Radon 变换对相机视角校正, 并据此用像素格数推算实际距离, 简化了模型, 实质上将视频图像简化成一组已知的太阳高度角数据。

7.2 模型的不足

在赤纬角计算式的推导过程中, 本文对条件作近似简化, 将轨道近似视作标准圆, 但在实际情况中, 日地系统会受到其他天体的影响, 轨道并不是标准的圆, 赤纬角并非精确计算, 导致最终计算结果存在一定误差。

7.3 模型的改进方向

赤纬角在天文学理论中具有重要的作用, 参与了天体测量学、动力学和天体物理学中多个物理量的定义, 在本文中影响太阳位置的确定。通过精密测量技术对赤纬角进行深入研究, 并获得精确的数值, 对涉及到的物理量重新进行计算, 可获得更精确的结果, 在利用太阳影子进行定位的问题中具有突破性的进展, 得到更符合实际, 更具有合理性的位置与时间。

8 参考文献

- [1] 刘学富. 基础天文学[M]. 北京:高等教育出版社,2004:22.
- [2] Bernard Bourges. Improvement in Solar Declination Computation [J]. Solar Energy, 1985,35(4):367-369.
- [3] 武琳. 基于太阳阴影轨迹的经纬度估计技术研究[D]. 天津:天津大学, 2010.
- [4] Imran N. Junejo, Hassan Foroosh, Estimating geo-temporal location of stationary cameras using shadow trajectories, in: Proceedings of the ECCV[J.], 2008,318-331.


```

    J=j;
    W=w;
    px=x2;
    py=y2;
    min=sum;
end
end
end
end
end

```

9.3 问题二影长模型关键代码

```

model:
sets:
id/1..21/:d,t,cl;
endsets
data:
pi=3.14159265358979323846;
N=107;
d=.....
t=.....
enddata
min=@sum(id(i):@sqr(L/(@tan(@asin(@sin(w*pi/180)*@sin(@asin(@sin(23.43917
*pi/180)*@sin(2*pi*(N-
80)/365.2422)))+@cos(w*pi/180)*@cos(@asin(@sin(23.43917*pi/180)*@sin(2*pi*
(N-80)/365.2422)))*@cos(pi*(t(i)+(j-120)/15)/12))))-d(i)));
@for(id(i):cl(i)=L/(@tan(@asin(@sin(w*pi/180)*@sin(@asin(@sin(23.43917*pi/18
0)*@sin(2*pi*(N-
80)/365.2422)))+@cos(w*pi/180)*@cos(@asin(@sin(23.43917*pi/180)*@sin(2*pi*
(N-80)/365.2422)))*@cos(pi*(t(i)+(j-120)/15)/12)))));
@bnd(-90,w,90);
@bnd(-180,j,180);
end

```

9.4 问题三附录一计算的关键代码

```

model:
sets:
id/1..21/:d,t;
endsets
data:
pi=3.1415926535897932384626433832795028841971;
d=.....
t=.....
enddata
min=@sum(id(i):@sqr(L/(@tan(@asin(@sin(w*pi/180)*@sin(@asin(@sin(23.43917
*pi/180)*@sin(2*pi*(N-
80)/365.2422)))+@cos(w*pi/180)*@cos(@asin(@sin(23.43917*pi/180)*@sin(2*pi*
(N-80)/365.2422)))*@cos(pi*(t(i)+(j-120)/15)/12))))-d(i)));
!根据纬度的正负确定南北;
@bnd(20,w,50);

```

```
@bnd(70,j,130);
@bnd(1,N,365);
@gin(N);
```

9.5 问题三附录三关键代码

```
model:
sets:
id/1..21/:d,t;
endsets
data:
pi=3.1415926535897932384626433832795028841971;
d=.....
t=.....
enddata
min=@sum(id(i):@sqr(L/(@tan(@asin(@sin(w*pi/180)*@sin(@asin(@sin(23.43917
*pi/180)*@sin(2*pi*(N-
80)/365.2422)))+@cos(w*pi/180)*@cos(@asin(@sin(23.43917*pi/180)*@sin(2*pi*
(N-80)/365.2422)))*@cos(pi*(t(i)+(j-120)/15)/12))))-d(i)));
!改变正负确定南北;
@bnd(-90,w,90);
@bnd(-180,j,180);
@bnd(1,N,365);
@gin(N);
end
```

9.6 问题四已知时间定位关键代码

```
model:
sets:
id/1..24/:d,t;
endsets
data:
pi=3.1415926535897932384626433832795028841971;
N=193;
L=2;
d=.....
t=.....
enddata
min=@sum(id(i):@sqr(L/(@tan(@asin(@sin(w*pi/180)*@sin(@asin(@sin(23.43917
*pi/180)*@sin(2*pi*(N-
80)/365.2422)))+@cos(w*pi/180)*@cos(@asin(@sin(23.43917*pi/180)*@sin(2*pi*
(N-80)/365.2422)))*@cos(pi*(t(i)+(j-120)/15)/12))))-d(i)));
@bnd(-90,w,90);
@bnd(-180,j,180);
!@bnd(1,N,365);
!@gin(N);
end
```

9.7 问题四未知影长定位的代码

```
model:
sets:
```

```

id/1..24/:d,t;
endsets
data:
pi=3.1415926535897932384626433832795028841971;
l=2;
d=.....
t=.....
enddata
min=@sum(id(i):@sqr(L/(@tan(@asin(@sin(w*pi/180)*@sin(@asin(@sin(23.43917
*pi/180)*@sin(2*pi*(N-
80)/365.2422)))+@cos(w*pi/180)*@cos(@asin(@sin(23.43917*pi/180)*@sin(2*pi*
(N-80)/365.2422)))*@cos(pi*(t(i)+(j-120)/15)/12))))-d(i));
!改变正负确定南北;
@bnd(0,w,90);
@bnd(-180,j,180);
@bnd(1,N,365);
@gin(N);
end

```